Lipeomorphisms Close to an Anosov Diffeomorphism (力学系の理論)

高木, 健太郎

数理解析研究所講究録
216巻 1974年 99-109

Lipeomorphisms close to an Anosov Diffeomorphism

名大理　髙木健太郎

§0 Introduction

以下Mをcompact connected boundaryless C^∞-manifold of dimension n with a Riemannian metric $\|\cdot\|$とする。$\|\cdot\|$より自然にinduceされるM上のdistance functionをdで表わす。MからMへのcontinuous mapの全体を$C^0(M)$で表わし，homeomorphismの全体を$H(M)$で表わす。$C^0(M)$上にはdより自然にinduceされるdistance function d_0がある.

; $d_0(f, g) = \sup_{x \in M} d(f(x), g(x))$　　$^\forall f, g \in C^0(M)$

MからMへのlipschitz mapの全体を$L(M)$で表わし，lipeomorphismの全体を$HL(M)$で表わす。; $HL(M) = \{f \in H(M) \mid f, f^{-1} \in L(M)\}$

勿論，$HL(M) \subset L(M) \subset C^0(M)$である。$HL(M)$の各元$f, g$に対して，$d_0(f, g)$が十分小さければ，lipschitzの意味での近さを計る量$d_\ell(f, g)$が自然に定義される。(§1)

MからM上へのC^1-diffeomorphismの全体を$\mathrm{Diff}^1(M)$で表わす。$\mathrm{Diff}^1(M)$の各元f, gに対しても，$d_0(f, g)$が十分小さければ，C^1の

意味での近さを計る量 $d_1(f,g)$ が自然に定義される。平均値の定理によって, $\mathrm{Diff}^1(M) \subset HL(M)$ であるが, d_ℓ を $\mathrm{Diff}^1(M)$ に制限したものが d_1 であるとみてよい。(See §1 and [4])

$f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ が Anosov diffeomorphism であるとは次の条件をみたすことである。

: $\exists E^s = \bigcup_{x \in M} E^s_x$, $\exists E^u = \bigcup_{x \in M} E^u_x$: continuous subbundles of TM

$\exists c \geqq 1$, $\exists \lambda : 0 < \lambda < 1$: constants

such that

(i) $TM = E^s \oplus E^u$ (Whitney sum)

(ii) $df(E^\sigma) = E^\sigma$ $\sigma = s, u$. 但し, df は f の differential を表わす。

(iii) $\| df^n(v) \| \leqq c \cdot \lambda^n \|v\|$ $\forall v \in E^s$ $\forall n \geq 0$

$\| df^{-n}(w) \| \leqq c \cdot \lambda^n \|w\|$ $\forall w \in E^u$ $\forall n \geq 0$

Anosov diffeomorphism の stability に関して次の定理がある。

Theorem (Anosov) ([1])

$f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ を Anosov diffeomorphism とする。 このとき,

$\exists \varepsilon_0 > 0$ $\exists \delta_0 > 0$

such that

$\exists^1 \varphi : \{ g \in \mathrm{Diff}^1(M) \mid d_1(g,f) < \delta_0 \} \longrightarrow \{ u \in C^0(M) \mid d_0(u, 1_M) < \varepsilon_0 \}$

with the property that $g \circ \varphi(g) = \varphi(g) \circ f$ for $\forall g \in \mathrm{Diff}^1(M)$ with $d_1(g,f) < \delta_0$

更にこのとき，各 $g \in \mathrm{Diff}^1(M)$ with $d_1(g,f) < \delta_0$ に対して，$\varphi(g)$ は homeomorphism であり，$d_0(\varphi(g), 1_M) \longrightarrow 0$ as $d_1(g,f) \rightarrow 0$ でもある。

Theorem (P. Walters) ([7])

$f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ を Anosov diffeomorphism とする。　　このとき，

$^\exists \varepsilon_0 > 0 \quad ^\exists \delta_0 > 0$

such that

$$^{\exists 1}\varphi : \{g \in H(M) \mid d_0(g,f) < \delta_0\} \longrightarrow \{u \in C^0(M) \mid d_0(u, 1_M) < \varepsilon_0\}$$

with the property that $f \circ \varphi(g) = \varphi(g) \circ g$ for $^\forall g \in H(M)$ with $d_0(g,f) < \delta_0$

更にこのとき，各 $g \in H(M)$ with $d_0(g,f) < \delta_0$ に対して $\varphi(g)$ は onto であり，$d_0(\varphi(g), 1_M) \longrightarrow 0$ as $d_0(g,f) \longrightarrow 0$ でもある。

Remark.

P. Walters の定理で，$\varphi(g)$ は一般には injective ではない.

ここでは次の定理を証明する.

Theorem ([6])

$f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ を Anosov diffeomorphism とする.　　このとき，

$^\exists \varepsilon_0 > 0 \quad ^\exists \delta_0 > 0$

such that

$$^{\exists 1}\varphi : \{g \in HL(M) \mid d_\ell(g,f) < \delta_0\} \longrightarrow \{u \in C^0(M) \mid d_0(u, 1_M) < \varepsilon_0\}$$

with the property that $g \circ \varphi(g) = \varphi(g) \circ f$ for $^\forall g \in HL(M)$ with $d_\ell(g,f) < \delta_0$

更にこのとき，各 $g \in HL(M)$ with $d_\ell(g,f) < \delta_0$ に対して，$\varphi(g)$ は homeomorphism であり，$d_0(\varphi(g), 1_M) \rightarrow 0$ as $d_\ell(g,f) \rightarrow 0$ でもある。

証明は，J. Moser [4] の idea に依りながら，Anosov diffeomorphism が expansive であることに注意して進めていく。([6])

$\{(U_\alpha, \alpha)\}_\alpha$ を有限個の charts よりなる M の 1つの atlas とする。但し各 local diffeomorphism α は，U_α の closure $\overline{U_\alpha}$ を含む，M のある open subset 上で define されているとする。

; $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$: a finite open covering of M.

$\mathcal{D}(\alpha) \supset \overline{U_\alpha}$, $\alpha : \mathcal{D}(\alpha) \to \mathbb{R}^n$ into C^∞ diffeomorphism.

$\mathbb{R}^n$ の standard norm を $|\cdot|$ で表わす。

§1. Lipschitz maps on M.

正数 λ_1 を次の条件をみたすように十分小さくとる。

; 各 $f \in C^0(M)$ with $d_0(f, 1_M) < \lambda_1$ に対して，

$$f(\overline{U_\alpha}) \subset \mathcal{D}(\alpha) \quad {}^\forall\alpha$$

任意に $f \in C^0(M)$ with $d_0(f, 1_M) < \lambda_1$ をとる。このとき，$f \in L(M)$ となるためには，各 α に対して $\alpha \circ f \circ \alpha^{-1} : \alpha(U_\alpha) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ が lipschitz map であること，即ち $\alpha \circ f \circ \alpha^{-1} : \alpha(U_\alpha) \to \mathbb{R}^n$ の lipschitz constant を記号 $L(\alpha \circ f \circ \alpha^{-1}$ on $\alpha(U_\alpha))$（または単に $L(\alpha \circ f \circ \alpha^{-1})$）で表わすとき，$L(\alpha \circ f \circ \alpha^{-1}$ on $\alpha(U_\alpha)) < +\infty$ であることが必要かつ十分である。

各 $f \in L(M)$ with $d_0(f, 1_M) < \lambda_1$ に対して，$d_L(f, 1_M)$ を，

$$d_L(f, 1_M) = d_0(f, 1_M) + \sup_\alpha L(\alpha \circ f \circ \alpha^{-1} - 1 \text{ on } \alpha(U_\alpha))$$

によって定める。また 各 $g, f \in HL(M)$ with $d_0(g,f) = d_0(g\circ f^{-1}, 1_M) < \lambda_1$ に対して, $d_L(g,f) = d_L(g\circ f^{-1}, 1_M)$ と定める.

Proposition.

$f \in L(M)$ を $d_0(f, 1_M) < \lambda_1$ として任意にとる。このとき, もし, $d_L(f, 1_M)$ が十分小であるならば, f は M の lipeomorphism である. ; $f \in HL(M)$

§2. Lipschitz vector fields on M.

$\mathfrak{X}^0(M)$ を M 上の continuous vector field の全体とする。$\mathfrak{X}^0(M)$ の中には, complete norm $\|\cdot\|$ が, M上の与えられている Riemannian metric $\|\cdot\|$ より自然に induce される。

; $\|v\| = \sup_{x\in M} \|v_x\|$ $\quad \forall v = (v_x)_{x\in M} \in \mathfrak{X}^0(M)$

各 chart (U_α, α) に対して, $U'_\alpha = \alpha(U_\alpha)$ とおき, $T\alpha : TM|U_\alpha \longrightarrow U'_\alpha \times \mathbb{R}^n$ を α より自然に induce された isomorphism とする。$T\alpha : TM|U_\alpha \longrightarrow U'_\alpha \times \mathbb{R}^n$ と projection $U'_\alpha \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ との composition を $D\alpha$ で表わす.

$$\begin{tikzcd} TM|U_\alpha \arrow[r, "T\alpha"] \arrow[dr, "D\alpha"'] & U'_\alpha \times \mathbb{R}^n \arrow[d, "\text{projection}"] \\ & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

また 各 $v \in \mathfrak{X}^0(M)$ に対して, $v_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n$ を $v_\alpha = D\alpha \circ v|U_\alpha$ によって定める。

map $|\cdot| : \mathfrak{X}^0(M) \longrightarrow \mathbb{R}^+ = \{a \in \mathbb{R} \mid a \geqq 0\}$ を,

$$|v| = \sup_\alpha \left(\sup_{x\in U_\alpha} |v_\alpha(x)| \right) \qquad \forall v \in \mathfrak{X}^0(M)$$

によって定める。$|\cdot|$ は $\mathfrak{X}^0(M)$ の中の complete norm であり，$\|\cdot\|$ とは equivalent である。

Definition.

$^\forall v \in \mathfrak{X}^0(M)$ をとる。このとき，v が M 上の lipschitz vector field であるとは，各 α に対して $v_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n$ が lipschitz である，即ち $L(v_\alpha \circ \alpha^{-1} \text{ on } U'_\alpha) < +\infty$ であることを言うものと定める。

M 上の lipschitz vector field の全体を $\mathfrak{X}_l(M)$ で表わす。map $|\cdot|_l : \mathfrak{X}_l(M) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ を，

$$|v|_l = |v| + \sup_{\alpha} L(v_\alpha \circ \alpha^{-1}) \qquad {}^\forall v \in \mathfrak{X}_l(M)$$

によって定める。$(\mathfrak{X}_l(M), |\cdot|_l)$ は 1つの Banach space である。

$\exp = (\exp_x)_{x \in M} : TM \longrightarrow M$ を，M 上の与えられている Riemannian metric $\|\cdot\|$ より induce された exponential map とする。

一般に normed space $(E, \|\cdot\|)$ に於いて，原点の回りの closed λ-ball を $(E, \|\cdot\|)_\lambda$ で，open λ-ball を $(E, \|\cdot\|)^\circ_\lambda$ で夫々表わすことにする。

M は compact であるから，正数 λ_2 が存在して，各 $x \in M$ に対して $\exp_x$ は $(T_xM, \|\cdot\|)^\circ_{\lambda_2}$ から，(M, d) に於ける x の回りの open λ_2-ball への onto diffeomorphism を与えるようにできる。更にこのとき，任意の $x \in M$ 及び $v_x \in T_xM$ with $\|v_x\| < \lambda_2$ に対して $\|v_x\| = d(x, \exp_x v_x)$ であるとしてよい。従って この λ_2 に対しては $\exp : (\mathfrak{X}^0(M), \|\cdot\|)^\circ_{\lambda_2} \ni v \longrightarrow \exp v = \exp \circ v \in \{f \in C^0(M) \mid d_0(f, 1_M) < \lambda_2\}$ は

well-defined で bijective であり, 更に, 任意の $v \in (\mathfrak{X}^0(M), \|\cdot\|)^\circ_{\lambda_2}$ に対して, $d_0(\exp v, 1_M) = \|v\|$ となる。便宜上, $\lambda_2 \leqq \lambda_1$ としておく。

$|\cdot|$ と $\|\cdot\|$ との equivalent 性により, 正数 ε_1 が存在して, $(\mathfrak{X}^0(M), |\cdot|)^\circ_{\varepsilon_1} \subset (\mathfrak{X}^0(M), \|\cdot\|)^\circ_{\lambda_2}$ となる。

Proposition

正数 ε_2 ; $0 < \varepsilon_2 \leqq \varepsilon_1$ が存在して 次の条件をみたす。

; (i) 各 $v \in (\mathfrak{X}^0(M), |\cdot|)^\circ_{\varepsilon_2}$ に対して

$$\exp v \in L(M) \underset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow} v \in \mathfrak{X}_\ell(M)$$

(ii) 各 sequence $\{v^{(i)}\}_{i=1}^\infty \subset \mathfrak{X}_\ell(M) \cap (\mathfrak{X}^0(M), |\cdot|)^\circ_{\varepsilon_2}$ に対して

$$d_\ell(\exp v^{(i)}, 1_M) \to 0 \text{ as } i \to \infty \underset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow} |v^{(i)}|_\ell \to 0 \text{ as } i \to \infty$$

§3. proof of the theorem.

Lemma 1

正数 δ_1, ε_3 ; $0 < \varepsilon_3 \leqq \varepsilon_1$, 関数 $L_1 : (0, \delta_1) \times (0, \varepsilon_3) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ 及び continuous map $r : (\mathfrak{X}_\ell(M), |\cdot|_\ell)^\circ_{\delta_1} \times (\mathfrak{X}^0(M), |\cdot|)^\circ_{\varepsilon_3} \longrightarrow \mathfrak{X}^0(M)$ が存在して 次の条件をみたす。

; (i) 各 $w \in (\mathfrak{X}_\ell(M), |\cdot|_\ell)^\circ_{\delta_1}$ 及び $v \in (\mathfrak{X}^0(M), |\cdot|)^\circ_{\varepsilon_3}$ に対して

$$\exp w \circ \exp v = \exp(w + v + r(w, v)) \qquad r(w, 0) = r(0, v) = 0$$

(ii) $\forall \delta$; $0 < \delta < \delta_1$, $\forall \varepsilon$; $0 < \varepsilon < \varepsilon_3$, $\forall w \in (\mathfrak{X}_\ell(M), |\cdot|_\ell)_\delta$ 及び $\forall v, v' \in (\mathfrak{X}^0(M), |\cdot|)_\varepsilon$ に対して,

$$|r(w, v) - r(w, v')| \leqq L_1(\delta, \varepsilon) \cdot |v - v'|$$

(iii) $L_1(\delta, \varepsilon) \longrightarrow 0 \quad \text{as} \quad \delta, \varepsilon \longrightarrow 0$

以下 $f : M \longrightarrow M$ を1つの C^1-diffeomorphism としてとり, 固定する。
この f に対して $\mathcal{X}^0(M)$ の continuous linear automorphism f_* を

$$f_*(v) = df \circ v \circ f^{-1} \qquad {}^\forall v \in \mathcal{X}^0(M)$$

によって定める。

Lemma 2

正数 ε_4 ; $0 < \varepsilon_4 \leqq \varepsilon_1$, 有界関数 $L_2 : (0, \varepsilon_4) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ 及び continuous map $s : (\mathcal{X}^0(M), |\cdot|)^{\circ}_{\varepsilon_4} \longrightarrow \mathcal{X}^0(M)$ が存在して, 次の条件をみたす。

; (i) 各 $v \in (\mathcal{X}^0(M), |\cdot|)^{\circ}_{\varepsilon_4}$ に対して

$$f \circ \exp v \circ f^{-1} = \exp(f_*(v) + s(v)) \quad , \quad s(0) = 0$$

(ii) 各 ε ; $0 < \varepsilon < \varepsilon_4$ 及び $v, v' \in (\mathcal{X}^0(M), |\cdot|)_\varepsilon$ に対して

$$|s(v) - s(v')| \leqq L_2(\varepsilon)\, |v - v'|$$

(iii) $L_2(\varepsilon) \longrightarrow 0 \quad \text{as} \quad \varepsilon \longrightarrow 0.$

Lemma 3

f を Anosov diffeomorphism とする。然らば f は expansive である, 即ち, 正数 λ_0 が存在して, 各 $x, y \in M$ with $x \neq y$ に対して常に

$$\sup_{m \in \mathbb{Z}} d(f^m(x), f^m(y)) > \lambda_0$$

proof of the theorem

${}^\forall g \in HL(M)$ 及び ${}^\forall u \in C^0(M)$ をとる。 このとき,

$$g\circ u = u\circ f \underset{\text{iff}}{\iff} (g\circ f^{-1})\circ(f\circ u\circ f^{-1}) = u \quad \cdots\cdots ①$$

いま $d_\ell(g,f)$ 及び $d_0(u,1_M)$ が十分小さければ，§2 で述べたことより，$\exists^1 w\in\mathfrak{X}_\ell(M)$ with $|w|_\ell$ sufficiently small，$\exists^1 v\in\mathfrak{X}^0(M)$ with $|v|$ sufficiently small such that $g\circ f^{-1}=\exp w$，$u=\exp v$ となる。よって ① は次の式と equivalent となる。

$$;\quad \exp w\circ f\circ\exp v\circ f^{-1} = \exp v \quad \cdots\cdots ②$$

Lemma 2 続いて Lemma 1 により，

$$\exp w\circ f\circ\exp v\circ f^{-1} = \exp w\circ\exp\left(f_*(v)+s(v)\right)$$
$$= \exp\left(w+f_*(v)+s(v)+r(w, f_*(v)+s(v))\right)$$

よって ② は次の式と equivalent である．

$$;\quad w+f_*(v)+s(v)+r(w, f_*(v)+s(v)) = v \quad \cdots\cdots ③$$

いま f は Anosov diffeomorphism であるから $1-f_*:\mathfrak{X}^0(M)\longrightarrow\mathfrak{X}^0(M)$ は continuous linear automorphism である。従って ③ は次の式と equivalent である。

$$;\quad v = (1-f_*)^{-1}\left(w+s(v)+r(w, f_*(v)+s(v))\right) \quad \cdots\cdots ④$$

以下 ④ を解くことを考える。

各 $w\in\mathfrak{X}_\ell(M)$ with $|w|_\ell$ sufficiently small 及び $v\in\mathfrak{X}^0(M)$ with $|v|$ sufficiently small に対して，$F(v) = f_*(v)+s(v)$，$G_w(v) = (1-f_*)^{-1}(w+s(v)+r(w, f_*(v)+s(v)))$ と考えおく．Lemma 1 の (ii) と (iii) 及び Lemma 2 の (ii) と (iii) により次の命題を得る．

$;\quad \exists\delta_2;\ 0<\delta_2\leqq\delta_1,\quad \exists\varepsilon_5;\ 0<\varepsilon_5<\varepsilon_1$

such that

(i) $\forall w \in (\mathfrak{X}_\ell(M), |\cdot|_\ell)^\circ_{\delta_2}$, $\forall v \in (\mathfrak{X}^\circ(M), |\cdot|)_{\varepsilon_5}$ に対して

$$|(1-f_*)^{-1}(s(v))| \leqq 1/3\,|v|$$

$$|(1-f_*)^{-1}(r(w, F(v)))| \leqq 1/3\,|v|$$

(ii) $\forall w \in (\mathfrak{X}_\ell(M), |\cdot|_\ell)^\circ_{\delta_2}$ $\forall v, v' \in (\mathfrak{X}^\circ(M), |\cdot|)_{\varepsilon_5}$ に対して

$$|G_w(v) - G_w(v')| \leqq 1/2\,|v - v'|$$

さて, $\forall \varepsilon : 0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_5$ をとる. この ε に対して,

$\exists \delta : 0 < \delta \leqq \delta_2$ such that $|(1-f_*)^{-1}(w)| < 1/3\,\varepsilon$ for $\forall w \in (\mathfrak{X}_\ell(M), |\cdot|_\ell)^\circ_\delta$ であることはよい。いま $\forall w \in (\mathfrak{X}_\ell(M), |\cdot|_\ell)^\circ_\delta$ をとるとき, いま述べたことと, 上の (i), (ii) により, $G_w(\ ) : (\mathfrak{X}^\circ(M), |\cdot|)_\varepsilon \ni v \longrightarrow G_w(v) \in (\mathfrak{X}^\circ(M), |\cdot|)_\varepsilon$ は well-defined で, contraction constant $1/2$ の contraction になっている. (更に, 各 $v \in (\mathfrak{X}^\circ(M), |\cdot|)_\varepsilon$ に対して, $|G_w(v)| < \varepsilon$ でもある。) 従って contraction principle により

$$\exists!\, v \in (\mathfrak{X}^\circ(M), |\cdot|)^\circ_\varepsilon \text{ s.t. } G_w(v) = v$$

$$\text{i.e. } \exp w \circ f \circ \exp v \circ f^{-1} = \exp v.$$

さて, $u = \exp v$ は 1_M と homotopic であるから onto である. よって次の命題を証明すれば, Theorem の証明は終わる.

: $\forall u : M \to M$ map を $d_0(u, 1_M) < \lambda_0/2$ にとり fix する. いま, もし, $\exists g : M \to M$ bijective map such that $g \circ u = u \circ f$ であるならば, u は injective である.

∵)

$^\forall x, y \in M$ をとり，$u(x)=u(y)$ と仮定する．$x \neq y$ と仮定すれば Lemma 3 により，$^\exists m_0 \in \mathbb{Z}$ s.t. $d(f^{m_0}(x), f^{m_0}(y)) \geq \lambda_0$．一方 $u \circ f^{m_0} = g^{m_0} \circ u$ であるから，$u \circ f^{m_0}(x) = g^{m_0}(u(x)) = g^{m_0}(u(y)) = u \circ f^{m_0}(y)$

$$\therefore\ \lambda_0 \leq d(f^{m_0}(x), f^{m_0}(y)) \leq d(f^{m_0}(x), u \circ f^{m_0}(x)) + d(u \circ f^{m_0}(y), f^{m_0}(y))$$
$$\leq d(u, 1_M) + d(u, 1_M) < \lambda_0$$

これは矛盾である。よって $x=y$ でなければならない．//

q.e.d.

References.

[1]. Anosov, *Geodesic Flows on Closed Riemannian Manifolds with Negative Curvature*, Proceeding of the Steklov Institute of Mathematics, (translated by the AMS) No. 90 (1967)

[2]. Dieudonné, *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York, 1960

[3] Hirsch and Pugh, *Stable Manifolds and Hyperbolic Sets*, Proc. of Symposia in Pure Math. (Global Analysis) XIV, AMS (1970) 133 ~ 163.

[4] Moser, *On a Theorem of Anosov*, J. of Differential Equations 5 (1969) 411 ~ 440.

[5]. Nitecki, *Differentiable Dynamics*, Cambridge the M.I.T. Press. 1971.

[6]. Takaki, *Lipeomorphisms close to an Anosov Diffeomorphism*, (to appear)

[7]. Walters, *Anosov diffeomorphisms are topologically stable*, Topology 9, 71 ~ 78 (1970)